Бірінші тур (*10 минут; әр есеп 6 балл*).

1.1. $\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5}$ теңдігін қанағаттандыратын x, y сандары үшін $\frac{xy}{x^2-6y^2}$ өрнегінің мәнін табыңыз.

1.2. A - 2008-ден аспайтын барлық жай сандардың көбейтіндісі болсын. B - 2008-ден аспайтын барлық тақ сандардың көбейтіндісі болсын. AB санының ондық жазылуындағы соңғы цифрының алдындағы цифрды табыңыз.

1.3. $10^{20} - 2^{20}$ саны екінің ең үлкен қандай дәрежесіне бөлінеді?

Первый тур (*10 минут; каждая задача 6 баллов*).

1.1. Числа *x* и *y* таковы, что $\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5}$. Найдите значение выражения $\frac{xy}{x^2-6y^2}$

1.2. Пусть *A* – произведение всех простых чисел, не превосходящих 2008, *B* – произведение всех нечетных чисел, не превосходящих 2008. Найдите предпоследнюю цифру в десятичной записи числа *AB*.

1.3. На какую наибольшую степень двойки делится число $10^{20} - 2^{20}$?

Екінші тур (*15 минут; әр есеп 7 балл*).

2.1. Салыстырыңыз: $\sin 3$ и $\sin 3^\circ$.

2.2. Е нүктесі АВСД трапециясының АС диагоналінің бойында жатады. АДЕ үшбұрышының ауданы АВЕ үшбұрышының ауданынан екі есе үлкен болатын болса, онда ВС және АД табандарының қатынасын табыңыз.

2.3. x^7+x^5+1 көпмүшесін екі көпмүшенің көбейтіндісі түрінде көрсетіңіз.

Второй тур (*15 минут; каждая задача 7 баллов*).

2.1. Сравните: $\sin 3$ и $\sin 3^\circ$.

2.2. Точка E лежит на диагонали AC трапеции $ABCD$. Найдите отношение ее оснований BC и AD, если площадь треугольника ADE в два раза больше площади треугольника ABE.

2.3. Представьте многочлен x^7+x^5+1 в виде произведения двух многочленов.

Үшінші тур (*20 минут; әр есеп 8 балл*).

3.1. $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$ және $a + b + c + d = 1$ болса, онда $7a^2 + 5b^2 + 3c^2 + d^2$ өрнегінің ең кіші мәнін табыңыз.

3.2. ABC теңбүйірлі үшбұрышының AB және BC бүйір қабырғаларынан $AK = BL$ болатындай K және L нүктелері алынған. $KL \ge \frac{1}{2} AC$ болатынын дәлелдеңіз.

3.3. 4k + 5 және 9k + 4 өрнектері k-ның кейбір натурал мәндерінде біруақытта қандай да бір сандардың квадраттары болатыны белгілі. Сондай k-ның мәндерінде 7k+4 өрнегі қандай мәндер қабылдай алады?

Третий тур (*20 минут; каждая задача 8 баллов*).

3.1. Известно, что $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$ и $a + b + c + d = 1$. Найдите наименьшее значение выражения $7a^2 + 5b^2 + 3c^2 + d^2$.

3.2. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $AK = BL$. Докажите, что $KL \ge \frac{1}{2} AC$.

3.3. Известно, что выражения 4k + 5 и 9k + 4 при некоторых натуральных значениях k одновременно являются точными квадратами. Какие значения может принимать выражение 7k + 4 при тех же значениях k?

Төртінші тур (*25 минут; әр есеп 9 балл*).

4.1. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуінің коэффициенттері $2a + 3b + 6c = 0$ шартын қанағаттандырады. Бұл квадрат теңдеудің (0; 1) интервалында түбірі бар екенін дәлелдеңіз.

4.2. Келесі өрнектің мәнін табыңыз: $(1 + \mathrm{tg}1^\circ)\times(1 + \mathrm{tg}2^\circ)\times \ldots \times(1 + \mathrm{tg}44^\circ)$.

4.3. ABC үшбұрышында: I – іштей сызылған шеңбер центрі, D – AB қабырғасының ортасы. AID бұрышының тік екені белгілі болса, $\frac{AB + BC}{AC}$ мәнін табыңыз.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача 9 баллов*).

4.1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале (0; 1).

4.2. Найдите значение выражения: $(1 + \mathrm{tg}1^\circ)\times(1 + \mathrm{tg}2^\circ)\times \ldots \times(1 + \mathrm{tg}44^\circ)$.

4.3. В треугольнике ABC: I – центр вписанной окружности, D – середина AB. Найдите $\frac{AB + BC}{AC}$, если известно, что угол AID – прямой.

Бесінші тур (*60 минут; әр есеп 10 балл*).

5.1 Тақтада 17 екі таңбалы сан жазулы тұрды. Математик оның ішінен біреуін таңдап алып, жүз дәрежеледі. Шыққан сан қалған 16 санның барлығына бөлінетін болып шықты. Шыққан сан қалған 16 санның көбейтіндісіне де бөлінеді деп айту дұрыс па?

5.2. $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ екендігі белгілі. $(a + b)(b + c)(c + a)$ өрнегі қандай мәндер қабылдауы мүмкін?

5.3 Дәлелдеңіз:

$$(a, b, c, d > 0)\quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

5.4. Натурал a, b, c және d сандары келесі теңдікті қанағаттандырады:

ab = cd. a + b + c + d саны жай сан бола алады ма?

5.5. ABC үшбұрышында K нүктесінде қиылысатын *AL* және *BM* медианалары жүргізілген. C төбесі *K*, *L* және *M* нүктелерінен өтетін шеңбер бойында жатады. Егер AB қабырғасының ұзындығы a-ға тең болса, онда CN медианасының ұзындығын табыңыз.

Пятый тур (*60 минут; каждая задача 10 баллов*).

5.1 На доске было записано 17 двузначных чисел. Математик выбрал одно из них и возвел его в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на каждое из оставшихся шестнадцати. Верно ли, что оно делится и на их произведение?

5.2. Известно, что $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Какие значения может принимать выражение $(a + b)(b + c)(c + a)$?

5.3 Докажите

$$(a, b, c, d > 0)\quad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

5.4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что ab = cd. Может ли число a + b + c + d оказаться простым?

5.5. В треугольнике *ABC* проведены медианы *AL* и *BM*, пересекающиеся в точке *K*. Вершина *C* лежит на окружности, проходящей через точки *K*, *L* и *M*. Найдите длину медианы *CN*, если длина стороны *AB* равна *a*.