ШЕШІМДЕРІ:

1-ТУР

1.1. Числа x и y таковы, что $\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5}$. Найдите значение выражения $\frac{xy}{x^2-6y^2}$.

Ответ: ±1.

Первый способ. Из условия задачи следует, что $xy \neq 0$ и $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно переменной x, получим, что $x = 2y$ или $x = 3y$.

Если $x = 2y$, то $\frac{xy}{x^2-6y^2} = \frac{2y \cdot y}{4y^2-6y^2} = \frac{2y^2}{-2y^2} = -1$; если $x = 3y$, то $\frac{xy}{x^2-6y^2} = \frac{3y \cdot y}{9y^2-6y^2} = \frac{3y^2}{3y^2} = 1$.

Второй способ. Из условия следует, что $y \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель данной дроби на y^2: $\frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+6}=\frac{1}{5}$.

Пусть $t=\frac{x}{y}$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$, корнями которого являются числа 2 и 3. Таким образом, $\frac{xy}{x^2-6y^2}=\frac{t}{t^2-6}$ = ±1.

1.2. Пусть A – произведение всех простых чисел, не превосходящих 2008, B – произведение всех нечетных чисел, не превосходящих 2008. Найдите предпоследнюю цифру в десятичной записи числа $A \cdot B$.

Ответ: 5.

Рассмотрим указанное произведение простых чисел. Поскольку в него входят множители 2 и 5, то оно оканчивается на ноль. Так как все остальные множители нечетные, то предпоследняя цифра числа A – нечетная.

Произведение нечетных чисел оканчивается на 5 (поскольку один из множителей равен пяти, а остальные – нечетные). Перемножая числа $A = \overline{\ldots a0}$ и $B = \overline{\ldots 5}$, где a – нечетная цифра, получим число вида $\overline{\ldots 50}$.

1.3. На какую наибольшую степень двойки делится число $10^{20} - 2^{20}$?

Ответ: на 2^{24}.

Разложим данное выражение на множители: $10^{20} - 2^{20} = 2^{20} \cdot 5^{20} - 2^{20} = 2^{20} \cdot (5^{20} - 1)$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Продолжим разложение на множители, используя формулы $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ и $a^p + b^p = (a + b)(a^{p-1} - a^p$

$^{-2}b + a^{p-3}b^2 - \ldots - ab^{p-2} + b^{p-1}$). Первая формула справедлива для всех натуральных n, а вторая – для всех нечетных p.

Тогда $2^{20}\cdot(5^{20} - 1) = 2^{20}\cdot(5^{10} - 1)\cdot(5^{10} + 1) = 2^{20}\cdot(5^5 - 1)\cdot(5^5 + 1)\cdot(25^5 + 1) = 2^{20}\cdot(5 - 1)\cdot(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1)\cdot(5 + 1)\cdot(5^4 - 5^3 + 5^2 - 5 + 1)\cdot(25 + 1)\cdot(25^4 - 25^3 + 25^2 - 25 + 1) = 2^{24}\cdot(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1)\cdot 3\cdot(5^4 - 5^3 + 5^2 - 5 + 1)\cdot 13\cdot(25^4 - 25^3 + 25^2 - 25 + 1)$. Последние пять множителей – нечетные, значит, 2^{24} – искомое число.

Можно также не раскладывать на множители выражение $5^{10} + 1$, если отдельно доказать (например, по индукции), что при любом натуральном n выражение $5^n + 1$ дает остаток 2 при делении на 4, то есть $5^{10} + 1$ делится на 2, но не делится на 4.

Второй способ. Используем бином Ньютона: $5^{20} - 1 = (1 + 4)^{20} - 1 = 1 + 20\cdot 4 + \frac{20\cdot 19}{2}\cdot 4^2 + \ldots + 4^{20} - 1 = 5\cdot 2^4 + 10\cdot 19\cdot 2^4 + \ldots + 4^{20}$.

В полученной сумме первое слагаемое делится только на 16, а каждое из остальных делится хотя бы на 32. Значит, число $5^{20} - 1$ делится только на 2^4, а исходное число – на 2^{24}.

2-ТУР

2.1. Сравните: sin3 и sin3°.

Ответ: sin3 > sin3°.

$\sin 3 = \sin(\pi - 3) > \sin 0{,}1 > \sin\frac{\pi}{60} = \sin 3°$, так как $\pi - 3 > 0{,}1 > \frac{\pi}{60}$ и эти числа лежат в промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$, а функция $y = \sin x$ на этом промежутке возрастает.

2.2. Точка E лежит на диагонали AC трапеции $ABCD$. Найдите отношение ее оснований BC и AD, если площадь треугольника ADE в два раза больше площади треугольника ABE.

Ответ: $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$

Пусть h_1 и h_2 – перпендикуляры, опущенные на диагональ AC из вершин D и B соответственно, а h – высота трапеции (см. рис. 2). Тогда

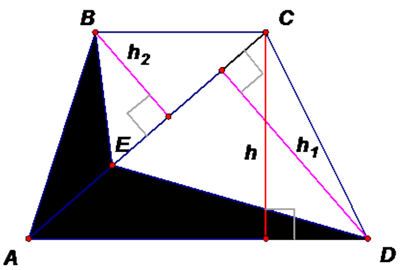


Рис. 2

$$\frac{1}{2} = \frac{S_{ABE}}{S_{AED}} = \frac{\frac{1}{2}AE\cdot h_2}{\frac{1}{2}AE\cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{1}{2}h_2\cdot AC}{\frac{1}{2}h_1\cdot AC} = \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}h\cdot BC}{\frac{1}{2}h\cdot AD} = \frac{BC}{AD}.$$

2.3. Представьте многочлен $x^7 + x^5 + 1$ в виде произведения двух многочленов.

Ответ: $x^7 + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

<u>Первый способ</u>. $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 + x^5 + x^3) - (x^3 - 1) = x^3(x^4 + x^2 + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3(x^2 - x + 1) - x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$, так как $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

<u>Второй способ</u>. $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 + x^6 + x^5) - (x^6 - 1) = x^5(x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)(x^3 - 1) = x^5(x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Если исходить из предположения, что все коэффициенты искомых множителей – целые числа, то ответ можно получить, воспользовавшись методом «неопределенных коэффициентов».

3-ТУР

3.1. Известно, что $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ и $a + b + c + d = 1$. Найдите наименьшее значение выражения $7a^2 + 5b^2 + 3c^2 + d^2$.

<u>Ответ</u>: 1.

Значение 1 достигается при $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Докажем, что при заданных условиях $7a^2 + 5b^2 + 3c^2 + d^2 \geq 1$.

<u>Первый способ</u> («алгебраический»). Так как $a + b + c + d = 1$, то $(a + b + c + d)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = 1$.

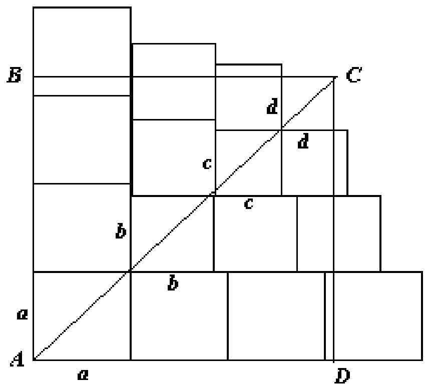
Так как $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$, то выполняются неравенства: $2a^2 \geq 2ab$, $2a^2 \geq 2ac$, $2a^2 \geq 2ad$, $2b^2 \geq 2bc$, $2b^2 \geq 2bd$ и $2c^2 \geq 2cd$.

Заменив в полученном равенстве удвоенные произведения на соответствующие удвоенные квадраты, получим требуемое неравенство.

<u>Второй способ</u> («геометрический»). Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1 (см. рис. 3). Разместим в его левом нижнем углу квадрат со стороной a. Из условия следует, что $a \geq \frac{1}{4}$, поэтому, если разместить еще три таких же квадрата «в столбик» и еще три – «в строчку», то мы либо «вылезем» за границы $ABCD$, либо (при $a = \frac{1}{4}$) «попадем» на стороны BC и CD.

Аналогичным образом разместим квадрат со стороной b в нижнем углу оставшегося квадрата, и добавим по два таких же квадрата «в столбик» и «в строчку». Так как $b \geq \frac{1-a}{3}$, то и в этом случае незаполненным останется только квадрат со стороной $1 - (a + b)$. Заполнив его описанным образом тремя квадратами со стороной $c \geq \frac{1-(a+b)}{2}$, мы получим незаполненным только один квадрат со стороной d. Сумма площадей шестнадцати построенных квадратов равна левой части доказываемого неравенства.

От мет им, чт о если среди чисел a, b, c и d ест ь хот я бы два различных, т о доказанное неравенст во обращает ся в ст рогое.



3.2. В равнобедренном треугольнике *ABC* на боковых сторонах *AB* и *BC* взяты точки *К* и *L* так, что *AК* = *BL*. Докажите, что $KL \geq \frac{1}{2}AC$.

<u>Первый способ</u>. Достроим данный треугольник *ABC* до параллелограмма *ABDC* и на стороне *CD* отложим отрезок *CN* = *BL* (см. рис. 2а). Тогда из равенства треугольников *KBL* и *NCL* следует, что *LN* = *KL*, а из того, что *AKNC* – параллелограмм, следует, что *AC* = *KN*. Применив неравенство треугольника для ΔKLN получим, что *KL* + *LN* ≥ *KN*, то есть, $KL \geq \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

Рис. 2а

<u>Второй способ</u> Проведем *DE* – среднюю линию треугольника *ABC*. Если *KL* совпадает с *DE*, то $KL = \frac{1}{2}AC$. В противном случае проведем также отрезки *KP* и *LQ*, параллельные *AC* (см. рис. 2б). Так как *AК* = *CP* = *BL* = *BQ*, то *DE* – средняя линия равнобокой трапеции *KPLQ*. Пусть *LN* – высота этой трапеции, тогда *KL* > *KN* = *DE* = $\frac{1}{2}AC$. Таким образом, $KL \geq \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

Рис. 2б

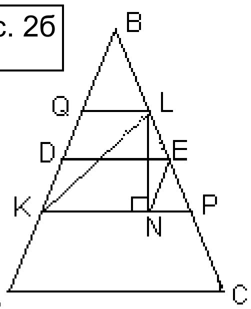
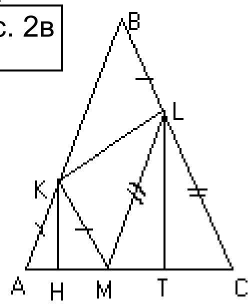


Рис. 2в



<u>Третий способ</u>. Проведем *KM* || *BC* (см. рис. 2в), тогда ΔAKM – равнобедренный, то есть, *KM* = *AK* = *BL*. Следовательно, *KMLB* – параллелограмм, то есть, *ML* || *AB* и *ML* = *KB* = *LC*.

Проведём высоты *KH* и *LT* в равнобедренных треугольниках *AKM* и *MLC* соответственно. Так как эти высоты являются медианами, то *HT* = $\frac{1}{2}AC$, а *HT* ≤ *KL*, так как *HT* – ортогональная проекция отрезка *KL* на прямую *AC*. Таким образом, $KL \geq \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

Четвертый способ. Проведем KH и LT – перпендикуляры к прямой AC (см. рис. 2в), тогда $HT \le KL$. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, тогда $AH = AK\cdot\cos\alpha$, $CT = CL\cdot\cos\alpha$. Следовательно, $AH + CT = (AK + CL)\cdot\cos\alpha = AB\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}AC$, поэтому, $HT = \frac{1}{2}AC$. Таким образом, $KL \ge \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

3.3. Известно, что выражения $4k + 5$ и $9k + 4$ при некоторых натуральных значениях k одновременно являются точными квадратами. Какие значения может принимать выражение $7k + 4$ при тех же значениях k?

Ответ: 39.

Пусть $4k + 5 = m^2$ и $9k + 4 = n^2$, где m и n – некоторые натуральные числа. Выразим k из первого равенства и подставим во второе: $9\cdot\frac{m^2-5}{4}+4=n^2 \Leftrightarrow 9m^2 - 4n^2 = 29 \Leftrightarrow (3m - 2n)(3m + 2n) = 29 \Leftrightarrow \begin{cases}3m-2n=1\\3m+2n=29\end{cases}$, так как 29 – простое число. Единственным решением этой системы является пара чисел $m = 5$, $n = 7$. Тогда $k = 5$, а $7k + 4 = 39$.

4-ТУР

4.1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0; 1)$.

Первый способ. Предположим, что данное уравнение не имеет корней на интервале $(0; 1)$. Тогда, в силу непрерывности, квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ сохраняет знак на этом промежутке. При этом, ее значения: $f(0) = c$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(a + 2b + 4c)$, $f(1) = a + b + c$ – числа одного знака. Следовательно, число $f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1) = 2a + 3b + 6c$ имеет тот же знак, что противоречит условию. Предположение неверно, следовательно, данное уравнение имеет корень на интервале $(0; 1)$.

Второй способ. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Если $c = 0$, то $f(x) = 0$ при $x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}$. Из условия $2a + 3b = 0$ следует, что $-\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0; 1)$, что и требовалось.

2) Если $c \ne 0$, то $f(0) = c$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4a+6b+9c}{9}=\frac{2(2a+3b)+9c}{9}=\frac{-12c+9c}{9}=-\frac{c}{3}$. Таким образом, на концах отрезка $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ функция принимает значения разных знаков. Следовательно, по теореме о промежуточном значении, она обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Третий способ. Так как $\int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right)dx$ = $\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_0^1$ = $\frac{2a+3b+6c}{3}$ = 0, то квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает на отрезке [0; 1] как положительные, так и отрицательные значения. Кроме того, эта функция непрерывна на [0; 1], значит, она обращается в ноль в некоторой его внутренней точке.

4.2. Найдите значение выражения: (1 + tg1°)·(1 + tg2°)·...·(1 + tg44°).

Ответ: 2^{22}.

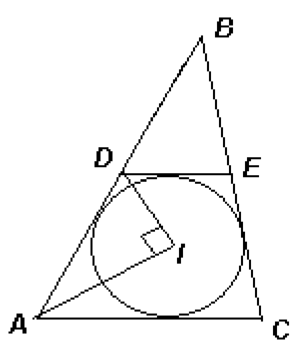
Так как $1 + \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}45^\circ + \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos\alpha \cdot \cos 45^\circ}$, то $1 + \mathrm{tg}1^\circ = \frac{\sin 46^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 45^\circ}$, $1 + \mathrm{tg}2^\circ = \frac{\sin 47^\circ}{\cos 2^\circ \cdot \cos 45^\circ}$, … , $1 + \mathrm{tg}43^\circ = \frac{\sin 88^\circ}{\cos 44^\circ \cdot \cos 45^\circ}$, $1 + \mathrm{tg}44^\circ = \frac{\sin 89^\circ}{\cos 44^\circ \cdot \cos 45^\circ}$.

Таким образом, $(1 + \mathrm{tg}1^\circ) \cdot (1 + \mathrm{tg}2^\circ) \cdot \ldots \cdot (1 + \mathrm{tg}44^\circ) = \frac{\sin 46^\circ \cdot \sin 47^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 89^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 44^\circ \cdot (\cos 45^\circ)^{44}}$. Учитывая, что $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, получим: $\sin 89^\circ = \cos 1^\circ$, $\sin 88^\circ = \cos 2^\circ$, …, $\sin 46^\circ = \cos 44^\circ$, откуда следует, что исходное выражение равно: $\frac{1}{(\cos 45^\circ)^{44}} = \left(\sqrt{2}\right)^{44} = 2^{22}$.

4.3. В треугольнике *ABC*: *I* – центр вписанной окружности, *D* – середина *AB*. Найдите $\frac{AB + BC}{AC}$, если известно, что угол *AID* – прямой.

Ответ: $\frac{AB + BC}{AC}$ = 3.

Первый способ. Проведем из точки *D* касательную к окружности, вписанной в треугольник *ABC* (см. рис. 6а). Пусть *E* – точка ее пересечения со стороной *BC*. Так как лучи *AI* и *DI* являются биссектрисами углов *A* и *D* четырехугольника *ADEC* и $\angle DAI + \angle ADI = 90^\circ$, то $\angle CAD + \angle ADE = 180^\circ$. Следовательно, *DE* || *AC*, то есть *DE* – средняя линия треугольника *ABC*.



По свойству описанного четырехугольника *AC* + *DE* = *AD* + *CE*, тогда 1,5*AC* = 0,5*AB* + 0,5*BC* ⇔ $\frac{AB + BC}{AC}$ = 3.

Следующие два способа решения используют тот факт, что $\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ (так как угол *AIB* образован биссектрисами углов *A* и *B* треугольника *ABC*). Тогда, из условия задачи следует, что $\angle DIB = \angle BCI = \frac{1}{2}\angle C$ (см. рис. 6 б, в).

<u>Второй способ</u>. На луче AB отметим точку C_1 так, что $BC = BC_1$ (см. рис. 6б). Через C_1 проведем прямую, параллельную прямой ID, и отметим точку C_2 ее пересечения с лучом AC и точку F ее пересечения с лучом AI. Тогда $\angle AFC_1 = 90°$.

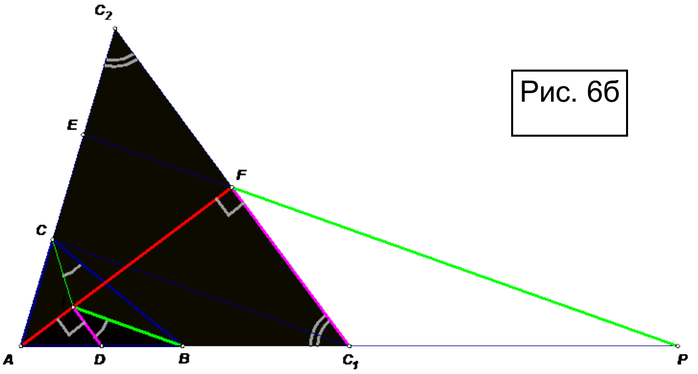


Рис. 6б

Кроме того, угол ABC – внешний угол при вершине равнобедренного треугольника CBC_1, BI – его биссектриса, следовательно, $BI \parallel C_1C$. Тогда $\angle CC_1C_2 = \angle DIB = \frac{1}{2}\angle C$ (углы, стороны которых противоположно направлены). Следовательно, в треугольнике AC_1C_2: $\angle C_2C_1A = \angle CC_1C_2 + \angle CC_1B = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle C_1C_2A$, то есть этот треугольник – равнобедренный: $AC_2 = AC_1 = AB + BC$.

Следовательно, F – середина C_1C_2. Через точку F проведем прямую, параллельную CC_1, P и E – точки ее пересечения с прямыми AC_1 и AC_2 соответственно. Тогда $CE = C_2E$ (по теореме Фалеса). Кроме того, так как $BI \parallel PF$, то треугольники AIB и AFP – подобны. При этом, ID – медиана треугольника AIB, значит, отрезок FC_1, параллельный ID, является медианой треугольника AFP. Так как $AC_1 = C_1P$, то $AC = CE$ (по теореме Фалеса).

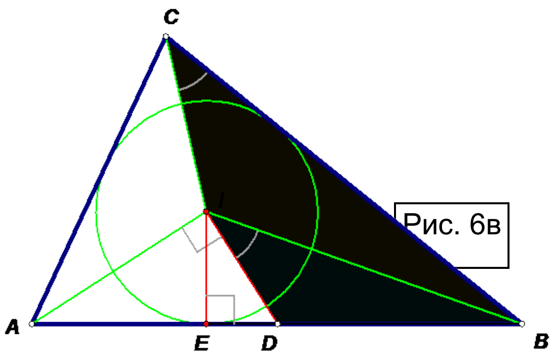


Рис. 6в

Таким образом, $\frac{AB + BC}{AC} = \frac{AC_2}{AC} = 3$.

<u>Третий способ</u>. Заметим, что треугольники IDB и CIB подобны (по двум углам, см. рис. 6в), поэтому $\frac{BI}{BC} = \frac{BD}{BI}$. Следовательно, $2BI^2 = BC \cdot AB$.

Введем стандартные обозначения: $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $\frac{a+b+c}{2} = p$ – полупериметр, r – радиус вписанной окружности, S – площадь треугольника ABC. Тогда $2BI^2 = ac$. Учитывая, что $BE = p - b$, из прямоугольного треугольника BEI получим: $BI^2 = IE^2 + BE^2 = r^2 + (p-b)^2$. Следовательно, $r^2 + (p-b)^2 = \frac{1}{2}ac$ (*).

Выразим радиус вписанной окружности, используя две формулы для вычисления площади треугольника: $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Тогда $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$.

Подставив это значение в равенство (*), получим: $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+(p-b)^2=\frac{1}{2}ac$. Преобразуем левую часть последнего равенства: $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+(p-b)^2$ = $\frac{p-b}{p}((p-a)(p-c)+p(p-b))$ = $\frac{p-b}{p}\left(p^2-p(a+b+c)+ac+p^2\right)=\frac{ac(p-b)}{p}$. Тогда $\frac{ac(p-b)}{p}$ = $\frac{1}{2}ac$ $\Leftrightarrow$ $2(p-b)=p$. Следовательно, $a+c-b=\frac{a+b+c}{2}$ $\Leftrightarrow 3b=a+c \Leftrightarrow$ $\frac{a+c}{b}=3$.

От мет им, чт о сущест вуют и другие «вычислит ельные» способы решения задачи, например, можно использоват ь формулу для вычисления биссект рисы т реугольника по его ст оронам и т еорему об от ношении, в кот ором цент р вписанной окружност и делит биссект рису.

5-ТУР

5.1. На доске было записано 17 двузначных чисел. Математик выбрал одно из них и возвел его в сотую степень. Оказалось, что полученное число делится на каждое из оставшихся шестнадцати. Верно ли, что оно делится и на их произведение?

Ответ: верно.

Если двузначное число n разложить в произведение простых множителей, то есть, представить в виде: $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_к^{\alpha_к}$, то $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_к\leq$ 6. Действительно, наименьшим простым множителем является число 2, а максимальным показателем степени в разложении может быть 6, так как $2^6 = 64 < 100$, а $2^7 = 128 > 100$.

Рассмотрим выбранное число m в сотой степени. По условию m^{100} кратно каждому из оставшихся чисел n_1, n_2, … n_{16}, следовательно, m^{100} кратно каждому простому делителю любого из этих чисел, причем в разложение числа m^{100} каждый из этих простых делителей входит с показателем степени, не меньшим ста.

Разложение произведения $n_1\cdot n_2\cdots n_{16}$ на простые множители содержит те же множители, причем показатель степени каждого из них не превосходит $16\cdot 6 = 96 < 100$. Значит, m^{100} делится на $n_1\cdot n_2\cdots n_{16}$, что и требовалось доказать.

5.2. Известно, что $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Какие значения может принимать выражение $(a+b)(b+c)(c+a)$?

Ответ: 0.

Преобразуем исходное равенство: $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow$

$$-\frac{b+c}{(a+b+c)a}=\frac{b+c}{bc} \Leftrightarrow \frac{(b+c)\left(a^2+ab+ac+bc\right)}{(a+b+c)abc}=0 \Leftrightarrow \frac{(b+c)(a+b)(c+a)}{(a+b+c)abc}=0.$$

Следовательно, $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

5.3.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+bd}+\frac{c^2}{cd+ca}+\frac{d^2}{da+db} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da+2ac+2bd} \quad , \quad \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da+2ac+2bd} \geq 2$$

$$(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da+2ac+2bd} \geq 2$$

5.4. Натуральные числа *a*, *b*, *c* и *d* таковы, что *ab = cd*. Может ли число *a + b + c + d* оказаться простым?

Ответ: нет, не может.

Из условия задачи следует, что $d=\frac{ab}{c}$. Тогда $a + b + c + d = a + b + c + \frac{ab}{c} = \frac{ac+c^2+ab+bc}{c} = \frac{c(a+c)+b(a+c)}{c} = \frac{(a+c)(b+c)}{c}$. Полученное число – натуральное, при этом, $a + c > c$ и $b + c > c$. Следовательно, при сокращении дроби получится произведение двух множителей, отличных от 1, то есть составное число.

5.5. В треугольнике *ABC* проведены медианы *AL* и *BM*, пересекающиеся в точке *K*. Вершина *C* лежит на окружности, проходящей через точки *K*, *L* и *M*. Найдите длину медианы *CN*, если длина стороны *AB* равна *a*.

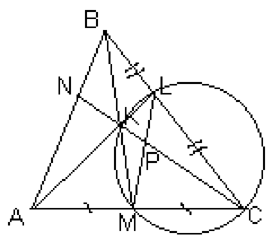


Рис. 3

Проведём в треугольнике *ABC* среднюю линию *ML; P* – точка пересечения *ML* и *CN* (см. рис. 3). *LP* и *PM* – средние линии в треугольниках *BCN* и *ACN* соответственно. *CN* = *x*, тогда $CP=\frac{x}{2}$, $PK = CK - CP = \frac{2}{3}x-\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$. $PL = PM = \frac{BN}{2}=\frac{a}{4}$. По свойству пересекающихся хорд окружности: $LP \cdot MP = KP \cdot CP$, то есть, $\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}=\frac{x}{6}\cdot\frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}a^2 \Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Ответ:** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.